Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1.

a) Notăm cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB],[BC],[CD]$ şi, respectiv $[DA]$. Rezultă că $G_1 \in (OM)$, $\frac{OG_1}{OM} = \frac{2}{3}, G_2 \in (ON), \frac{OG_2}{ON} = \frac{2}{3}$, $G_3 \in (OP)$, $\frac{OG_4}{OP} = \frac{2}{3}$ şi $G_4 \in (OQ)$, $\frac{OG_4}{OQ} = \frac{2}{3}$. Deoarece diagonalele unui paralelogram se taie în părţi congruente, rezultă că $[OM]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABC, $[OP]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔBCD, $[ON]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABC şi $[OQ]$ este linie mijlocie în triunghiul ΔABD, de unde obţinem că $OM \parallel BC$, $OP \parallel BC$ şi $ON \parallel DC$, $OQ \parallel AB$, adică punctele M, G_1, O, G_3, P sunt coliniare şi punctele N, G_2, O, G_4, Q sunt coliniare. Tot din proprietăţile linei mijlocii într-un triunghi obţinem că $OM = OP = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}$ şi $ON = OQ = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}$, deci $OG_1 = \frac{2}{3} \cdot OM = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC}{3}$, $OG_3 = \frac{2}{3} \cdot OP = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{BC}{3}$, $OG_2 = \frac{2}{3} \cdot ON = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}$ şi $OG_4 = \frac{2}{3} \cdot OQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{AB}{3}$. Prin urmare, $OG_1 = OG_3 = \frac{BC}{3}$ şi $OG_2 = OG_4 = \frac{AB}{3}$, adică diagonalele patrulaterului $G_1G_2G_3G_4$ se taie în părţi congruente, deci $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Dacă $G_1G_2G_3G_4$ este dreptunghi, atunci $G_1G_3 = G_2G_4 \Leftrightarrow OG_1 + OG_3 = OG_2 + OG_4 \Leftrightarrow \frac{BC}{3} + \frac{BC}{3} = \frac{AB}{3} + \frac{AB}{3} \Leftrightarrow BC = AB$. Prin urmare, $ABCD$ este paralelogram cu două laturi alăturate congruente $[AB]$ şi $[BC]$, de unde obţinem că $ABCD$ este romb.

c) Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + BC) = 36$, deci $AB + BC = 18$. Dar, $G_1G_3 + G_2G_4 = G_1O + OG_3 + G_2O + OG_4 = \frac{BC}{3} + \frac{BC}{3} + \frac{AB}{3} + \frac{AB}{3} = \frac{2 \cdot (AB + BC)}{3} = \frac{2 \cdot 18}{3} = 12$ cm. Răspuns, $G_1G_3 + G_2G_4 = 12$ cm.

Problema 2.

a) Din ipoteză avem că $n = \overline{abcd} = (m-1) \cdot m \cdot (m+1)$, unde $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Deci, $n = m^3 - m$ şi $1000 < m^3 - m < 10000$, de unde deducem că $11 \leq m \leq 21$. Ţinând cont că printre numerele $m-1$, m, $m+1$ sunt două numere prime, obţinem că $m = 12$ sau $m = 18$. Avem că $n = 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$ cu $\overline{ab} = 17$ şi $\overline{cd} = 16$ sau $n = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ cu $\overline{ab} = 58$ şi $\overline{cd} = 14$. Dar, din ipoteză avem că $\overline{cd}$ şi $\overline{ab}$ sunt numere naturale consecutive, deci problema are o singură soluţie $n = \overline{abcd} = 1716$.

b) Notăm cele 2013 numere naturale nenule cu $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ şi presupunem prin absurd că acestea sunt distincte două câte două. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că numerele

naturale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ sunt ordonate crescător, adică $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2013}$. Deoarece $a_1 \geq 1,\ a_2 \geq 2,\ a_3 \geq 3, \ldots, a_{2013} \geq 2013$, rezultă inegalităţile $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{2013}} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013} <$

$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+...+\frac{1}{2047}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1025}+...+\frac{1}{2047}\right)<$

$<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+...+\underbrace{\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+...+\frac{1}{1024}\right)}_{\text{de 1024 ori}} < \underbrace{1+1+1+...+1}_{\text{de 11 ori}} = 11$. Prin urmare, avem

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{2013}} < 11$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Deci, presupunerea făcută este falsă, de unde deducem că cel puţin două numere naturale dintre cele 2013 numerele naturale nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2013}$ sunt egale.

Problema 3.

Rezultă că $a\cdot\big((a+d)-(b+c)\big)=a\cdot(a-c)+a\cdot(d-b)=a\cdot(a-c)+a\cdot d-a\cdot b=a\cdot(a-c)+b\cdot c-a\cdot b=$

$=a\cdot(a-c)-b\cdot(a-c)=(a-b)\cdot(a-c)>0$, de unde deducem că $a+d>b+c$, adică $m<k$. Conform ipotezei $a\cdot\left(2^k-a\right)=b\cdot\left(2^m-b\right)\Leftrightarrow 2^m\cdot b-2^k\cdot a=b^2-a^2$, de unde rezultă că 2^m divide b^2-a^2, adică 2^m divide $(b-a)\cdot(b+a)$. Dacă $4\big|(a+b)$ şi $4\big|(b-a)$, atunci 4 divide $(a+b)+(b-a)$, adică 4 divide $2\cdot a$, de unde obţinem că $2\big|a$, ceea ce reprezintă o contradicţie, deoarece a este număr natural impar. Prin urmare, numerele $a+b$ şi $b-a$ nu sunt ambele divizibile cu 4 şi folosind că 2^m divide $(b-a)\cdot(b+a)$, obţinem că unul dintre numerele $b+a$ şi $b-a$ este divizibil cu 2^{m-1}, număr pe care-l notăm cu x. Deci, $2^{m-1}\,\big|\,x$ şi $0<x\leq b+a<b+c=2^m$, de unde obţinem $x=2^{m-1}$. Dacă a şi b nu sunt prime între ele şi p este un divizor comun care este număr natural prim, atunci din $b+a=2^{m-1}$ sau $b-a=2^{m-1}$ rezultă că p divide 2^{m-1}, adică $p=2$, de unde obţinem mai departe că a şi b sunt numere naturale pare. Contradicţie, deci numerele naturale a şi b sunt prime între ele. Dacă b şi c nu sunt prime între ele şi q este un divizor comun care este număr natural prim, atunci din $b+c=2^m$ rezultă că q divide 2^m, adică $q=2$, de unde obţinem mai departe că b şi c sunt numere naturale pare. Contradicţie, deci numerele naturale b şi c sunt prime între ele. Analog se demonstrează că a şi c sunt prime între ele.

Am obţinut că:

- numerele naturale a şi b sunt prime între ele
- numerele naturale a şi c sunt prime între ele
- $a\cdot d=b\cdot c$, adică $a\,\big|\,b\cdot c$,

de unde de rezultă că $a=1$, ceea ce trebuia demonstrat.